COLEGIUL NAȚIONAL PETRU RAREȘ BECLEAN

CONCURSUL NAȚIONAL INTEGRAT DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
„SEVER-AUREL GROZE”
Ediția a XII-a, Beclean, 15 – 17 mai 2026

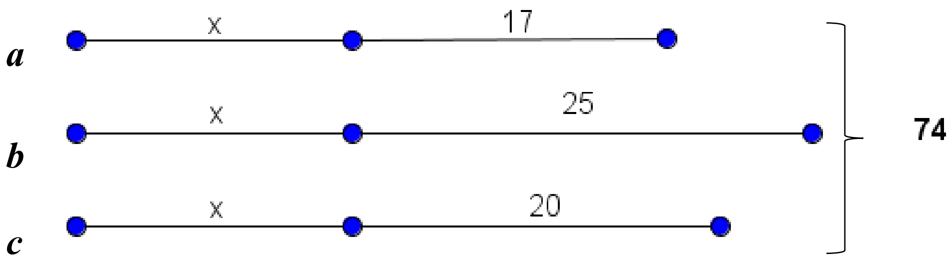
BAREM CLASA a III-a

Problema 1

Suma a trei numere naturale este 74. Dacă din primul se scade 17, din al doilea 25 și din al treilea 20, se obțin numere egale.

Care sunt cele trei numere inițiale ?

Barem de evaluare:

$\boldsymbol{a + b + c = 74}$	***3 p***
$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a - 17 = x} \\ \boldsymbol{b - 25 = x} \\ \boldsymbol{c - 20 = x} \end{array}\right\}$	***3 p***
	***3 p***
17 + 25 + 20 =62	***3 p***
74 – 62 =12	***3 p***
X = 12 : 3 = 4	***3 p***
Finalizare: 4 + 17 = 21 4 + 25 = 29 4 + 20 = 24	***4,5 p***
Total	***22,5 p***

Problema 2

Aflați valoarea numărului natural $\boldsymbol{a}$ *din relația:*

$$\{45363 - [536 + 387 - (2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10)]\} - 484 \text{ x } 8 = 40622$$

Barem de evaluare:

$\{45363 - [536 + 387 - (2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10)]\} - 3872 = 40622$	***3 p***
$\{45363 - [536 + 387 - (2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10)]\} = 44494$	***3 p***
$[536 + 387 - (2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10)] = 869$	***3 p***
$[923 - (2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10)] = 869$	***3 p***
$2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 - 10 = 54$	***3 p***
$2 \text{ x } \boldsymbol{a} + 48 = 64$	***3 p***
Finalizare : $\boldsymbol{a} = 8$	***4,5 p***
Total	***22,5 p***

Problema 3

O clasă de elevi de a III-a fac o excursie montană în patru zile. În prima zi parcurg o distanță de 4 ori mai mică decât lungimea totală a traseului, a doua zi parcurg o distanță de trei ori mai mică decât mai aveau de parcurs, a treia zi jumătate din ce a mai rămas de parcurs, iar în a patra zi restul de 50 km.

Care este lungimea totală a traseului ?

Barem de evaluare:

p p p p lungimea traseului	***3 p***
p lungimea parcursă prima zi (**p**)	***1,5 p***
p p p lungimea rămasă de parcurs	***3 p***
p lungimea parcursă a doua zi (**p**)	***1,5 p***
p p lungimea rămasă de parcurs	***3 p***
p lungimea parcursă a treia zi (**p**)	***1,5 p***
p lungimea rămasă de parcurs	***3 p***
p = ***50 km*** lungimea parcursă a patra zi	***1,5 p***
p + p + p + 50 = 4p	***1 p***
3p + 50 = 4p	***1 p***
p = 50 km	***1 p***
Finalizare: 50 x 4 = ***200 km***	***1,5 p***
Total	***22,5 p***

Problema 4

Andrei a scris pe o foaie toate numerele naturale de trei cifre care au cifra sutelor egală cu suma dintre cifra zecilor și cifra unităților.

a) Aflați câte numere de acest tip a scris Andrei pe foaie.
b) Dacă ordonăm descrescător aceste numere, aflați cel de-al 26-lea număr din șir.
c) Calculați suma primelor 10 numere din șirul descrescător.

Gazeta Matematică/2026

Barem de evaluare:

a) Numerele sunt de forma $\overline{abc}$, a. Î. *a = b + c* ***a,b,c – cifre ⇒a ≠ 0*** ....***1 p***

a = 1 ⇒ 101 , 110 - 2 numere .... ***1,5 p***
a = 2 ⇒ 202 , 211 , 220 - 3 numere .... ***1,5 p***
a = 3 ⇒ 303 , 312 , 321 , 330 - 4 numere .... ***1,5 p***
a = 4 ⇒ 404 , 413 ,422 , 431 , 440 - 5 numere .... ***1,5 p***
. . . . ***3 p***
a = 7 ⇒ 707 , 716 , 725 , 734 , 743 , 752 , 761 , 770 - 8 numere .... ***1,5 p***
a = 8 ⇒ 808 , 817, 826 , 835 , 844 ,853 , 862 , 871 , 880 - 9 numere .... ***1,5 p***
a = 9 ⇒ 909 , 918 ,927 ,936 , 945 ,954 , 963, 972, 981 , 990 - 10 numere .... ***1,5 p***
S = 2 + 3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 = 54 de numere ***1,5p***

b) Ordonăm descrescător : 990 , 981 , 972 , 963 , 954 , 945 , 936 , 927 , 918 , 909 , 880 , 871 , 862 , 853 , 844 , 835 , 826 , 817 , 808 , 770 , 761 , 752 , 743 , 734 , 725 , 716 , 707 , ..., 110,101. => cel de-al 26-lea număr este 716. ....***3,5 p***

c) S = 990 + 981 + 972 + 963 + 954 + 945 +936 + 927 + 918 + 909 = 9495 ....***3 p***

Total: 22,5 p

Fiecare subiect se notează cu 0 – 22,5 puncte.
Pentru problemele rezolvate „prin încercări” se acordă maximum 12,5 puncte.
*Se acordă **10 puncte din oficiu**.*

CONCURSUL NAȚIONAL INTEGRAT DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„*SEVER-AUREL GROZE* ”

Ediția a XII-a, Beclean, 15 – 17 mai 2026

BAREM CLASA a IV-a

Problema 1

Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor egal cu 0?

Barem de evaluare:

Numerele de patru cifre au forma : $\overline{abcd}$	***3 p***
Produsul cifrelor este 0 dacă una din cifrele care formează numărul este 0.	***3 p***
$1000 \le \overline{abcd} \le 9999$	***3 p***
Numărul total de numere de 4 cifre este egal cu 9999 – 1000 + 1 = 9000	***3 p***
Dacă numărul $\overline{abcd}$ nu conține cifra 0, atunci cifrele ***a, b, c, d*** pot avea 9 valori fiecare.	***3 p***
Deci avem 9 x 9 x 9 x 9 = 6561 de numere care nu conțin cifra 0.	***3 p***
Finalizare: 9000 – 6561 = 2439 de numere au produsul cifrelor egal cu 0.	***4,5 p***
Total	***22,5 p***

Problema 2

Determinați numerele naturale $\overline{\mathbf{abc}}$ *știind că, împărțite la* **7**, *dau câtul* $\overline{\mathbf{bc}}$ *și restul* $\mathbf{a}$.

Gazeta Matematică 2/2026

Barem de evaluare:

Din enunț avem $\overline{abc} = 7\,\overline{bc} + a$	***3 p***
$100\,a + \overline{bc} = 7\,\overline{bc} + a$	***3 p***
$99\,a = 6\,\overline{bc}$	***1,5 p***
$33\,a = 2\,\overline{bc} \Rightarrow$	***1,5 p***
$a = 1 \Rightarrow 33 = 2\,\overline{bc}$ - imposibil, $a = 2 \Rightarrow 66 = 2\,\overline{bc} \Rightarrow \overline{bc} = 33 \Rightarrow \overline{abc} = 233$	***3 p***
$a = 3 \Rightarrow 99 = 2\,\overline{bc}$ - imposibil, $a = 4 \Rightarrow 132 = 2\,\overline{bc} \Rightarrow \overline{bc} = 66 \Rightarrow \overline{abc} = 466$	***3 p***
$a = 5 \Rightarrow 165 = 2\,\overline{bc}$ - imposibil, $a = 6 \Rightarrow 198 = 2\,\overline{bc} \Rightarrow \overline{bc} = 99 \Rightarrow \overline{abc} = 699$	***3 p***
Pentru $\boldsymbol{a} > 6$ relația este imposibilă.	***1,5 p***
Finalizare: Numerele sunt 233, 466 și 699.	***3 p***
Total	***22,5 p***

Problema 3

Determinați numerele naturale de forma $\overline{\mathbf{abcd}}$ *cu* $\boldsymbol{a \neq b \neq c \neq d}$ *, care îndeplinesc simultan condițiile:*

1.) $\boldsymbol{a - b = 3}$

2.) $\boldsymbol{b - c = 3}$

3.) $\boldsymbol{c + d = a}$

Barem de evaluare:

$a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3$ $b - c = 3 \Rightarrow b = c + 3$	***3 p***
$a = c + 3 + 3 \Rightarrow a = c + 6$	***1,5 p***
$c + d = a \Rightarrow c + d = c + 6 \Rightarrow \boldsymbol{d = 6}$	***3 p***

a este cifră și $a = c + d \Rightarrow c + 6 \leq 9 \Rightarrow c \leq 3$	***3 p***
Din relațiile de mai sus, prin înlocuire, avem: $c = 0; a = 6; b = 3; d = 6$, dar $a = d$, deci $\overline{abcd} = 6306$ nu convine,	***2 p***
$c = 1; a = 7; b = 4; d = 6 \Rightarrow \overline{abcd} = 7416$,	***2,5 p***
$c = 2; a = 8; b = 5; d = 6 \Rightarrow \overline{abcd} = 8526$	***2,5 p***
$c = 3; a = 9; b = 6; d = 6$, dar $b = d$, deci $\overline{abcd} = 9636$ nu convine	***2 p***
Finalizare: Numerele $\overline{abcd}$ care îndeplinesc condițiile cerute sunt 7416 și 8526.	***3 p***
Total	***22,5 p***

Problema 4

*Codul PIN al unui telefon se numește „șmecher" dacă este format din patru caractere. Pe prima poziție este o literă din alfabetul limbii române, fără diacritice. Pe următoarele două poziții sunt cifre din sistemul zecimal de numerație. Pe ultima poziție este unul dintre următoarele caractere : @ , $,% , & , * , # .*

a) Câte coduri PIN „șmechere"se pot genera?

b) Timpul necesar pentru a verifica dacă un cod PIN este „șmecher" este de o (una) secundă. Aflați de cât timp ar fi nevoie pentru a verifica corectitudinea tuturor codurilor „șmechere".

Barem de evaluare:

a) Numărul de litere fără diacritice din alfabetul limbii române este de 26, deci prima poziție poate fi completată în 26 de moduri.	***3 p***
A doua poziție poate fi completată în 10 moduri.	***3 p***
A treia poziție poate fi completată în 10 moduri.	***3 p***
A patra poziție poate fi completată în 6 moduri.	***3 p***
Numărul total de coduri „șmechere" este: 26 x 10 x 10 x 6 = 15600.	***3 p***
b) Timpul necesar pentru a verifica toate cele 15600 de coduri „șmechere" este de 15600 s	***2,5 p***
1 oră = 3600 s	***2 p***
15600 : 3600 = 4 h și 20 min	***3 p***
Total	***22,5 p***

Fiecare subiect se notează cu 0 – 22,5 puncte.
Pentru problemele rezolvate „prin încercări" se acordă maximum 12,5 puncte.
*Se acordă **10 puncte din oficiu**.*

CONCURSUL NAȚIONAL INTEGRAT DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„*SEVER-AUREL GROZE* ”

Ediția a XII-a, Beclean, 15 – 17 mai 2026

BAREM **CLASA a V-a**

Problema 1 a) Arătați că $\mathbf{15^2+24^2+35^2=2026}$

b) Scrieți $\mathbf{2026^{2027}}$ ca sumă de cinci pătrate perfecte.

Soluție a) $15^2+24^2+35^2=225+576+1225=2026$ .... 3 p

b) $9^2+12^2+21^2+24^2+28^2=81+144+441+576+784=2026$ 7p

$2026^{2027}=2026\cdot 2026^{2026}=(9^2+12^2+21^2+24^2+28^2)\cdot 2026^{2026}=$ .... 4,5 p

$=9^2\cdot 2026^{2026}+12^2\cdot 2026^{2026}+21^2\cdot 2026^{2026}+24^2\cdot 2026^{2026}+28^2\cdot 2026^{2026}=$ .... 2 p

$=9^2\cdot 2026^{2\cdot 1013}+12^2\cdot 2026^{2\cdot 1013}+21^2\cdot 2026^{2\cdot 1013}+24^2\cdot 2026^{2\cdot 1013}+28^2\cdot 2026^{2\cdot 1013}=$ .... 2 p

$=9^2\cdot (2026^{1013})^2+12^2\cdot (2026^{1013})^2+21^2\cdot (2026^{1013})^2+24^2\cdot (2026^{1013})^2+28^2\cdot (2026^{1013})^2=$ .... 2 p

$=(9\cdot 2026^{1013})^2+(12\cdot 2026^{1013})^2+(21\cdot 2026^{1013})^2+(24\cdot 2026^{1013})^2+(28\cdot 2026^{1013})^2$,

deci sumă de cinci pătrate perfecte .... 2 p

Problema 2 Aflați cel mai mare număr natural n de 2026 cifre cu proprietatea că $s(n)=3\cdot s(n+1)$. Am notat cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n.

Soluție

Dacă ultima cifră a lui n este diferită de 9, atunci $s(n+1)=s(n)+1$, de unde obținem $s(n)=3\cdot(s(n)+1)$, nu se poate 3p

Așadar $n=\overline{A\underbrace{99\ldots 9}_{k\ cifre}}$, cu A număr natural cu ultima cifră diferită de 9, iar $k>0$ 3p

Atunci $n+1=\overline{(A+1)\underbrace{00\ldots 0}_{k\ cifre}}$, deci $s(n+1)=s(A)+1$ care implică $s(A)+9k=3\cdot s(A)+3$ de unde $2\cdot s(A)=9k-3$ 6p

Obținem $k=2p+1$, număr impar, deci $s(A)=9p+3$, de unde rezultă că A are cel puțin $p+1$ cifre 3p

Atunci n va avea cel puțin $2p+1+p+1=3p+2$ cifre, deci $2026\geq 3p+2$ care implică $p\leq 674$ 3p

Pentru a obține cel mai mare număr n va trebui să alegem cel mai mare număr A posibil, având cât mai multe cifre de 9 și cu ultima cifră diferită de 9, ceea ce implică p maxim, deci $p=674$. Obținem $n=\overline{\underbrace{99\ldots 9}_{674\ cifre}300\underbrace{99\ldots 9}_{1349\ cifre}}$ 4,5p

Problema 3 Se consideră numerele naturale $x, a_0, a_1, \ldots, a_8$ astfel încât $a_0 \neq 0$ și $2026 = a_0 \cdot x^8 + a_1 \cdot x^7 + \ldots + a_7 \cdot x + a_8$.

a) Determinați numerele $a_0, a_1, \ldots, a_8$ mai mici sau egale ca 4 și numărul x care verifică relația dată.

b) Determinați cel mai mic număr natural n astfel încât să existe $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_8 \leq n$ și x care verifică relația dată.

Soluție Cum $3^8 = 6561 > 2026$ și $a_0 \geq 1$ rezultă că $x \leq 2$ **3p**

a) Pentru $x \leq 1$ obținem $2026 = a_0 \cdot x^8 + a_1 \cdot x^7 + \ldots + a_7 \cdot x + a_8 \leq 4 \cdot 9 = 36$, nu se poate, deci $x = 2$ **1,5p**

Dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_8 = 4$, atunci $a_0 \cdot x^8 + a_1 \cdot x^7 + \ldots + a_7 \cdot x + a_8 = 2^{11} - 4 = 2044$. Așadar trebuie să modificăm valorile numerelor a_i astfel încât suma să scadă cu $2044 - 2026 = 18$. De aici rezultă imediat că $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 4$.

Avem $18 = 16 + 2 = 16 + 1 + 1 = 8 + 8 + 2 = 8 + 8 + 1 + 1 = 8 + 4 + 4 + 2 = 8+4+4+1+1 = 8+4+2+2+2 = 8+4+2+2+1+1 = 8+4+2+1+1+1+1 = 8+2+2+2+2+1+1 = 8+2+2+2+1+1+1+1 = 4+4+4+4+2 = 4+4+4+4+1+1 = 4+4+4+2+2+2 = 4+4+4+2+2+1+1 = 4+4+4+2+1+1+1+1 = 4+4+2+2+2+2+1+1 = 4+4+2+2+2+1+1+1+1$, de unde obținem soluțiile:

1. $a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 4, a_7 = 3, a_8 = 4$;
2. $a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 4, a_7 = 4, a_8 = 2$;
3. $a_4 = 4, a_5 = 2, a_6 = 4, a_7 = 3, a_8 = 4$;
4. $a_4 = 4, a_5 = 2, a_6 = 4, a_7 = 4, a_8 = 2$;
5. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 2, a_7 = 3, a_8 = 4$;
6. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 2, a_7 = 4, a_8 = 2$;
7. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 3, a_7 = 1, a_8 = 4$;
8. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 3, a_7 = 2, a_8 = 2$;
9. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 3, a_7 = 3, a_8 = 0$;
10. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 4, a_7 = 0, a_8 = 2$;
11. $a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 4, a_7 = 1, a_8 = 0$;
12. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 0, a_7 = 3, a_8 = 4$;
13. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 0, a_7 = 4, a_8 = 2$;
14. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 4$;
15. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 1, a_7 = 2, a_8 = 2$;
16. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 1, a_7 = 3, a_8 = 0$;
17. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 2, a_7 = 0, a_8 = 2$;
18. $a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 2, a_7 = 1, a_8 = 0$; **7,5p**

b) Dacă $x = 0$, atunci $a_8 = 2026$, deci nu putem obține minimul. Dacă $x = 1$ și $a_8 \leq 18$, suma maximă posibilă a celor 9 numere distincte este $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 126 < 2026$. Pentru $x = 2$, dacă $a_0 \geq 3$, atunci $a_0 \cdot x^8 + a_1 \cdot x^7 + \ldots + a_7 \cdot x + a_8 \geq 3 \cdot 2^8 + 4 \cdot 2^7 + \ldots + 10 \cdot 2 + 11 = 2035 > 2026$, nu se poate **3p**

Presupunem deci $x = 2$. Notăm $u_0 = a_0, u_1 = a_1 - a_0, \ldots, u_8 = a_8 - a_7$. Cum $a_0 < a_1 < \ldots < a_8$, rezultă că $u_0, u_1, \ldots, u_8 \geq 1$ și $a_8 = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$. Relația devine $2026 = u_0(2^9 - 1) + u_1(2^8 - 1) + \ldots + u_7(2^2 - 1) + u_8(2 - 1)$, deci $2026 + a_8 = u_0 \cdot 2^9 + u_1 \cdot 2^8 + \ldots + u_7 \cdot 2^2 + u_8 \cdot 2$. Astfel, a_8 este par. Dacă $a_8 < 18$, atunci $a_8 \in \{10, 12, 14, 16\}$. După împărțirea la 2 și după ce scriem $u_i = 1 + v_i$, termenii corespunzători lui $u_0 = u_1 = \ldots = u_8 = 1$ dau $2^8 + 2^7 + \ldots + 2 + 1 = 511$. Termenii suplimentari sunt v_0 termeni de 256, v_1 termeni de $128, \ldots$, v_8 termeni de 1, în total $a_8 - 9$ termeni. Pentru $a_8 = 10, 12, 14, 16$, sumele suplimentare necesare sunt $507, 508, 509, 510$, iar descompunerile în baza doi au respectiv $8, 7, 8, 8$ termeni:

$507 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1$, $\quad 508 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4$,

$509 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1$, $\quad 510 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$.

În fiecare caz sunt necesari mai mulți termeni decât cei disponibili $a_8 - 9$, deci $a_8 \geq 18$ **6p**

Pentru $x = 2, a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 6, a_3 = 8, a_4 = 10, a_5 = 12, a_6 = 14, a_7 = 16, a_8 = 18$, avem $2 \cdot 2^8 + 4 \cdot 2^7 + 6 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 18 = 2026$.
În concluzie, $n = 18$ **1,5p**

Problema 4. Se consideră o tablă cu 5 linii și 5 coloane. În cele 25 de pătrățele scriem numerele $1, 2, 3, \ldots, 25$. Este posibil ca sumele numerelor aflate pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie 10 numere diferite, iar fiecare număr din cele 10 să fie o putere de forma a^b, cu a și b numere naturale mai mari sau egale cu 2?

prelucrare Gazeta Matematică

Soluție Cea mai mică sumă posibilă este $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, iar cea mai mare sumă posibilă este $21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 115$ **7,5p**

Numerele naturale de forma $a^b, a \geq 2, b \geq 2$ cuprinse între 15 și 115 sunt $16 = 4^2, 25 = 5^2, 36 = 6^2, 49 = 7^2, 64 = 8^2, 81 = 9^2, 100 = 10^2, 27 = 3^3, 32 = 2^5$, în total 9 numere ... **9p**

Cum avem 10 sume și 9 valori distincte posibile rezultă că nu se poate **6p**

Se acordă ***10 puncte din oficiu***.

CONCURSUL NAȚIONAL INTEGRAT DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„SEVER-AUREL GROZE ”

Ediția a XII-a, Beclean, 15 – 17 mai 2026

BAREM CLASA a VI-a

Problema 1 Calculați suma

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}+\cdots+\frac{1}{89100}\quad .$$

Soluția 1

$18=9\cdot1\cdot2; 54=; 108=9\cdot3\cdot4; 180=9\cdot4\cdot5; \dots; 89100=9\cdot99\cdot100$ .... ***4,5 p***

$S=\frac{1}{9\cdot1\cdot2}+\frac{1}{9\cdot2\cdot3}+\frac{1}{9\cdot3\cdot4}+\frac{1}{9\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{9\cdot99\cdot100}$ .... ***3 p***

$9\cdot S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{99\cdot100}$ .... ***3 p***

$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\frac{1}{4\cdot5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5};\dots;\frac{1}{99\cdot100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$........ ***3 p***

$9\cdot S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$...................... ***3 p***

$9\cdot S=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$... ***3 p***

$S=\frac{11}{100}$... ***3 p***

Soluția 2

$18=3\cdot6; 54=6\cdot9; 108=9\cdot12; 180=12\cdot15; \dots; 89100=297\cdot300$ .... ***4,5 p***

$S=\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}+\frac{1}{12\cdot15}+\cdots+\frac{1}{297\cdot300}$ .... ***3 p***

$3\cdot S=\frac{3}{3\cdot6}+\frac{3}{6\cdot9}+\frac{3}{9\cdot12}+\frac{3}{12\cdot15}+\cdots+\frac{3}{297\cdot300}$......................... ***3 p***

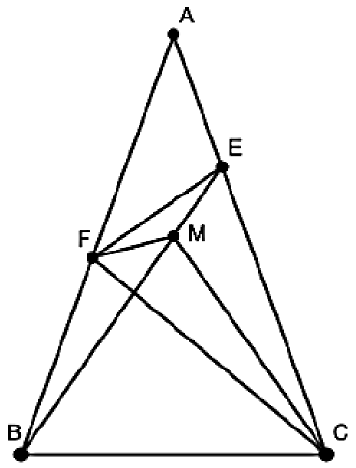
$\frac{3}{3\cdot6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6};\frac{3}{6\cdot9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{9};\frac{3}{9\cdot12}=\frac{1}{9}-\frac{1}{12};\frac{3}{12\cdot15}=\frac{1}{12}-\frac{1}{15};\dots;\frac{3}{297\cdot300}=\frac{1}{297}-\frac{1}{300}$. ***.3 p***

$3\cdot S=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{297}-\frac{1}{300}$.................... ***3 p***

$3\cdot S={}^{100)}\frac{1}{3}-\frac{1}{300}=\frac{99}{300}$.. ***3 p***

$S=\frac{99}{300}:3=\frac{99}{300}\cdot\frac{1}{3}=\frac{99^{(9}}{900}=\frac{11}{100}$ .... ***3 p***

Problema 2 Fie triunghiul isoscel ABC cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 70^\circ$ și punctele $E \in (AC), F \in (AB)$ astfel încât $\sphericalangle ABE = 15^\circ$ și $\sphericalangle ACF = 30^\circ$. Știind că există un punct $M \in (BE)$ astfel încât $ME = MF$, demonstrați că $AM \perp BC$.



Avem $\sphericalangle EBC = 55^\circ \Rightarrow \sphericalangle BEC = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ = 55^\circ$. Așadar, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBC \Rightarrow$ $\triangle BEC$ este isoscel $\Rightarrow BC = EC$ (1) **3p**
Totodată, $\sphericalangle FCB = 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle BFC = 70^\circ \Rightarrow \triangle FBC$ este isoscel $\Rightarrow BC = FC$ (2).... **3p**

Din (1), (2) rezultă $FC = CE \Rightarrow \triangle CFM \equiv \triangle CEM$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle FCM = \sphericalangle ECM = 15^\circ$ **6p**
Obținem $\sphericalangle MCB = 55^\circ = \sphericalangle MBC \Rightarrow \triangle MBC$ isoscel, deci $MB = MC$ **6p**
Cum $AB = AC$, rezultă că AM este mediatoarea lui $[BC]$, deci $AM \perp BC$ **4,5p**

Problema 3 Un număr natural n se numește *special* dacă printre divizorii săi sunt și numere formate din două cifre nenule și distincte și, pentru orice astfel de divizor d, numărul n este divizibil și cu răsturnatul lui d. Determinați toate numerele speciale de trei cifre.

Soluția 1

Cazul I: n are un divizor prim de forma $\overline{ab}, a \neq b$. Atunci $\overline{ba}$ este de asemenea un divizor al lui n. Dacă $a < b$ și $\overline{ab} \mid \overline{ba}$ rezultă că $\overline{ab} \mid 9(b-a)$, nu se poate, deci $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ sunt prime între ele. Dacă $a > b$, cum $\overline{ab}$ prim, obținem iarăși $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ prime între ele. Ca urmare, $\overline{ab} \cdot \overline{ba} \mid n$ **3p**
Fie $x = min\{a, b\}$. Atunci $\overline{ab} \cdot \overline{ba} > x^2 \cdot 121$, deci $x \in \{1, 2\}$. Dacă $x = 2$ obținem $y = 3$, deci $\overline{ba} = 32$, dar atunci n va avea ca divizori și pe 16 și 61, nu se poate. Sau $y = 9$, dar $29 \cdot 92 > 1000$ nu se poate **3p**
Dacă $x = 1$, cum $17 \cdot 71 > 1000$, rezultă că $y \leq 6$. Atunci $\overline{ab} \in \{13, 31\}$, implică $n = 13 \cdot 31 = 403$ și $n = 2 \cdot 13 \cdot 31 = 806$ **6p**
Dacă $\overline{ab} = 41 \Rightarrow \overline{ba} = 14 \Rightarrow n$ are ca divizori și pe 82 și pe 28, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $\overline{ab} = 61$, atunci $n = 61 \cdot 16 = 976$ **3p**

Cazul II: În cazul rămas, niciun divizor prim de forma $\overline{ab}, a \neq b$, nu divide n. Atunci orice divizor de două cifre nenule și distincte care divide n este compus și are numai factori

primi din mulțimea $\{2,3,5,7\}$.
Dacă $7^2 \mid n$ atunci 49 și 94 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $7 \mid n$ și $5 \mid n$ atunci 35 și 53 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $7 \mid n$ și $3 \mid n$ atunci 21,12,28 și 82 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $7 \mid n$ și $2 \mid n$ atunci 14,41,82 și 28 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $5^2 \mid n$ atunci 25 și 52 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $5 \mid n$ și $3 \mid n$ atunci 15,51,17 și 71 sunt divizori ai lui n, deci $n > 1000$, nu se poate.
Dacă $5 \mid n$ și $2 \mid n$ atunci n are ultima cifră egală cu 0, deci nu se poate.
Dacă $3^2 \mid n$ și $2 \mid n$ atunci 18,81,27 și 72 sunt divizori ai lui n. Din $72 \mid n$ rezultă $12 \mid n$, deci, din proprietatea din enunț, $21 \mid n$. Așadar $[18,81,27,72,12,21] \mid n$, însă $[18,81,27,72,12,21] = 4536 > 1000$, nu se poate.
Dacă $3 \mid n$ și $2^2 \mid n$ atunci 12,21,28 și 82 sunt divizori ai lui n, nu se poate **7,5p**

Soluția 2 Vom considera toate numerele naturale de 2 cifre $\overline{ab}, a < b$, cu proprietatea că *c.m.m.m.c.*$(\overline{ab}, \overline{ba})$ este un număr de trei cifre **3p**
Dintre acestea, pentru $\overline{ab} = 12, \overline{ba} = 21$, avem ca divizori și pe $2 \cdot 7 = 14$, deci și pe 41, însă $n = [12,21,14,41]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 13, \overline{ba} = 31$, obținem $n = 13 \cdot 31 = 403$ **3p**
Pentru $\overline{ab} = 14, \overline{ba} = 41$, avem ca divizori și pe $2 \cdot 41 = 82$, deci și pe 28, însă $n = [14,41,82,28]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 15, \overline{ba} = 51$, avem ca divizori și pe 17 și 71, însă $n = [15,51,17,71]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 16, \overline{ba} = 61$, obținem $n = 16 \cdot 61 = 976$ **3p**
Pentru $\overline{ab} = 17, \overline{ba} = 71$, obținem $n = 17 \cdot 71 > 1000$
Pentru $\overline{ab} = 18, \overline{ba} = 81$, avem ca divizori și pe 27 și 72, deci și pe 12 și 21, însă $n = [18,81,72,21]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 19, \overline{ba} = 91$, obținem $n = 19 \cdot 91 > 1000$
Pentru $\overline{ab} = 23, \overline{ba} = 32$, avem ca divizori și pe 16 și 61, însă $n = [23,32,16,61]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 24, \overline{ba} = 42$, avem ca divizori și pe 14 și 41, însă $n = [24,42,14,41]$ nu este număr de 3 cifre.
Pentru $\overline{ab} = 25, \overline{ba} = 52$, obținem $n = 25 \cdot 52 > 1000$
Pentru $\overline{ab} = 26, \overline{ba} = 62$, obținem $n = 2 \cdot 13 \cdot 31 = 806$ **3p**
Și așa mai departe, se analizează în continuare toate celelalte cazuri posibile, fără a mai găsi alte soluții.
Pentru analiza tuturor cazurilor care nu generează soluții se acordă **10,5p**

Problema 4

a) Aflați numerele a, b, c știind că $a+b+c=2025$ și $\frac{2a+3b}{a+b}=\frac{2b+3c}{b+c}=\frac{2c+3a}{a+c}$.

b) Arătați că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 12,9 și 11 dacă și numai dacă $\frac{a+2b}{b+c}=\frac{2b+3c}{a+2c}=\frac{3c+4a}{2b+3a}$.

Gazeta Matematică

Soluție

a) $\frac{2a+3b}{a+b}=\frac{2b+3c}{b+c}=\frac{2c+3a}{a+c} \Leftrightarrow 2+\frac{b}{a+b}=2+\frac{c}{b+c}=2+\frac{a}{a+c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{b+c}{c}=\frac{a+c}{a} \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}=1+\frac{b}{c}=1+\frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{b+c+a}=1 \Rightarrow$
$a=b=c=\frac{2025}{3}=675$ **6p**

b) " $\Rightarrow$ "
$\frac{a}{12}=\frac{b}{9}=\frac{c}{11}=k \Rightarrow a=12k, b=9k, c=11k$, deci $\frac{a+2b}{b+c}=\frac{30k}{20k}=\frac{3}{2}$; $\frac{2b+3c}{a+2c}=\frac{51k}{34k}=\frac{3}{2}$; $\frac{3c+4a}{2b+3a}=\frac{81k}{54k}=\frac{3}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.................... **4,5p**

" $\Leftarrow$ "
$\frac{a+2b}{b+c}=\frac{2b+3c}{a+2c}=\frac{3c+4a}{2b+3a}=\frac{2(a+2b)+2b+3c+3c+4a}{2(b+c)+a+2c+2b+3a}=\frac{3}{2}$ **6p**
Așadar $\frac{a+2b}{b+c}=\frac{3}{2}$ care implică $2a+b=3c$ (1) și, analog, $4b=3a$ (2) și $6c=6b+a$.
Din (2) rezultă $\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=3k$, deci $a=12k$ și $b=9k$, de unde, înlocuind în (1), obținem $c=11k$.. **3p**
Cum $k=\frac{a}{12}=\frac{b}{9}=\frac{c}{11}$, rezultă că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 12,9 și 11.. **3p**

***Fiecare subiect se notează cu 0 – 22,5 puncte**.*
*Se acordă **10 puncte din oficiu**.*

CONCURSUL NAȚIONAL INTEGRAT DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

„*SEVER-AUREL GROZE* ”

Ediția a XII-a, Beclean, 15 – 17 mai 2026

BAREM CLASA a VII-a

Problema 1 Fie $ABCD$ un pătrat și triunghiurile echilaterale ABN și BDM, unde N este în interiorul pătratului, iar M în exteriorul pătratului, astfel încât M și A sunt de aceeași parte a dreptei BD. Notăm cu P simetricul punctului B față de C, $AC \cap BN = \{Q\}, PQ \cap CD = \{R\}, PM \cap BD = \{S\}, PM \cap AD = \{T\}$. Demonstrați că

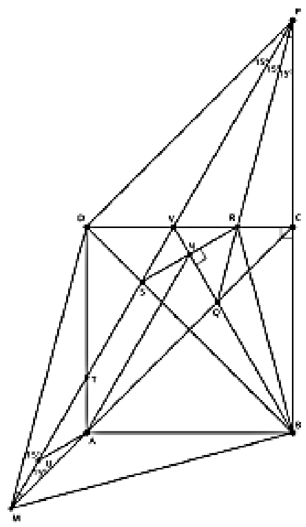
a) $DPQM$ este romb;

b) Punctele S, N, R sunt coliniare;

c) $ANST$ este trapez isoscel.

Gazeta Matematică

Soluție



a) ΔDPB isoscel $\Rightarrow DP = DB = DM \Rightarrow \Delta DMP$ isoscel,cu $\angle PDM = 150° \Rightarrow \angle DPM \equiv \angle DMP = 15° \Rightarrow$ Notăm $PM \cap CD = \{V\}$. Atunci $\angle VPC = 30°, \Delta VCP \equiv \Delta VCB$ (C.C.) $\Rightarrow \angle VBC = 30°$. Dar $\angle NBC = 30° \Rightarrow V$, N, B coliniare.

Cum $VC \parallel AB \Rightarrow \frac{VQ}{QB} = \frac{VC}{AB} = \frac{VC}{CP} = \frac{\frac{PV}{2}}{\frac{PB}{2}} = \frac{PV}{PB}$. Atunci, din reciproca teoremei bisectoarei, rezultă că PQ bisectoarea $\angle VPB \Rightarrow \angle VPQ = \angle QPB = 15°$. Dar $\angle DMP = \angle PMQ = 15° \Rightarrow \Delta PQM$ isoscel cu $\angle MQP = 150° \Rightarrow DMQP$ romb..**7,5p**

b) $\angle PVC \equiv \angle CVB = 60° \Rightarrow \angle SVB \equiv \angle RVB = 60°, \angle SBV \equiv \angle RBV = 15° \Rightarrow \Delta BSV \equiv \Delta BRV$ (U.L.U.) $\Rightarrow \Delta BSR$ isoscel, BV bisectoare $\Rightarrow BV \perp SR$. Totodată, $\Delta BCR \equiv \Delta BNR$ (L.U.L.) $\Rightarrow \angle BNR \equiv \angle BCR = 90° \Rightarrow RN \perp BN$. Dar $BV \perp RS \Rightarrow R$,$N$,$S$ coliniare..**6p**

c) BN bisectoare în $\triangle BSR$ isoscel $\Rightarrow SN = NR, \triangle RNC$ isoscel $\Rightarrow RN \equiv RC$ și $\angle RNC \equiv \angle RCN = 15^\circ$ (deoarece $\angle NRC = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$).

Fie $U \in (TM)$ astfel încât $\angle TAU = 120^\circ \Rightarrow \angle AUT = 30^\circ (\angle ATU = \angle DTI = 30^\circ) \Rightarrow \triangle AUT$ isoscel, deci $AT \equiv AU$. Totodată, $\angle UAM = 15^\circ$, deci $\triangle UAM$ isoscel.

Din $\triangle PCQ \equiv \triangle DAM \Rightarrow CQ \equiv AM, \angle CQN = 75^\circ, \angle NCQ = 30^\circ \Rightarrow \triangle CNQ$ isoscel $\Rightarrow CN \equiv CQ \Rightarrow CN \equiv AM \Rightarrow \triangle RNC \equiv \triangle UAM$ (U.L.U.) $\Rightarrow AU \equiv RC \Leftrightarrow AT \equiv SN (*)$.

Dar avem și $\angle NAC \equiv \angle TMA = 15^\circ \Rightarrow ST \parallel AN (**)$.

Din $(*), (**)$ și $TS < AN$ rezultă $ANST$ trapez isoscel **9p**

Problema 2 Determinați x știind că $\dfrac{x-\sqrt{2}}{2026} + \dfrac{x-2\sqrt{2}}{2025} + \cdots + \dfrac{x-2026\sqrt{2}}{1} = \dfrac{2026x}{2027}$.

Soluție Avem

$$\frac{x-\sqrt{2}}{2026} + \frac{x-2\sqrt{2}}{2025} + \cdots + \frac{x-2026\sqrt{2}}{1} = \frac{2026x}{2027} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left({}^{2027)}\frac{x-\sqrt{2}}{2026\sqrt{2}} - {}^{2026)}\frac{x}{2027\sqrt{2}} \right) + \left({}^{2027)}\frac{x-2\sqrt{2}}{2025\sqrt{2}} - {}^{2025)}\frac{x}{2027\sqrt{2}} \right) + \cdots$$

$$+ \left({}^{2027)}\frac{x-2026\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2027\sqrt{2}} \right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{10,5p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2027\sqrt{2}}{2027 \cdot 2026\sqrt{2}} + \frac{2x-2027 \cdot 2\sqrt{2}}{2027 \cdot 2025\sqrt{2}} + \cdots + \frac{2026x - 2027 \cdot 2026\sqrt{2}}{2027\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{2027 \cdot 2026\sqrt{2}} + \frac{2}{2027 \cdot 2025\sqrt{2}} + \cdots + \frac{2026}{2027\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{2026} + \frac{2}{2025} + \cdots + \frac{2026}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2027\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2026} + \frac{2}{2025} + \cdots + \frac{2026}{1} \right) = \frac{1}{2026} + \frac{2}{2025} + \cdots + \frac{2026}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2027\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2027\sqrt{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{12p}$$

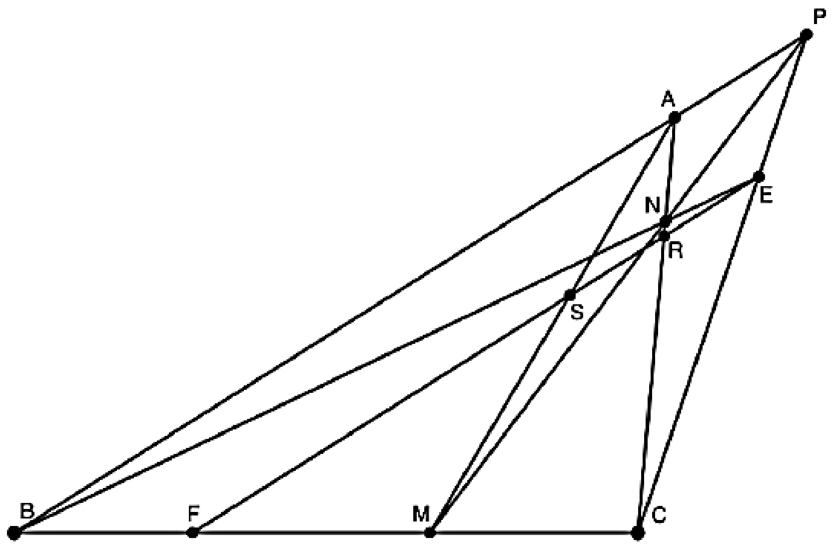
Problema 3 Se consideră triunghiul ABC astfel încât $AB = 15cm, BC = 12cm, CA = 8cm$. Fie punctele $M \in (BC), N \in (AC)$ astfel încât $BM = 8cm, CN = 6cm, \{P\} = MN \cap AB$ și $E \in (PC)$ astfel încât $\dfrac{PE}{EC} = \dfrac{2}{5}$.

a) Determinați AP.

b) Dacă paralela prin E la AB intersectează dreapta AC în punctul R și dreapta AM în punctul S, arătați că $ER = RS$.

Soluție

a) Din teorema lui Menelaus aplicată în $\triangle ABC$ cu transversala $M-N-P$, avem $\dfrac{MC}{MB}\cdot\dfrac{NA}{NC}\cdot\dfrac{PB}{PA} = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{PB}{PA} = 1$, de unde deducem $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{6}{1} \Rightarrow \dfrac{PB-PA}{PA} = \dfrac{6-1}{1}$, deci $\dfrac{15}{PA} = \dfrac{5}{1} \Rightarrow PA = 3cm$ **7,5p**



b) Fie $\{F\} = SR \cap BC$. Din teorema lui Menelaus aplicată în $\triangle SFM$ cu transversala $A-R-C$ rezultă $\dfrac{AS}{AM}\cdot\dfrac{RF}{RS}\cdot\dfrac{CM}{CF} = 1$. Dar din $FS \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AS}{AM} = \dfrac{BF}{BM}$(T.Thales). Deci $\dfrac{RF}{RS} = \dfrac{CF}{CM}\cdot\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{CF}{BF}\cdot\dfrac{BM}{CM}$. Dar $FE \parallel BP \Rightarrow \dfrac{CF}{FB} = \dfrac{CE}{EP}$, deci $\dfrac{RF}{RS} = \dfrac{CE}{EP}\cdot\dfrac{BM}{CM}$ **6p**

Din reciproca teoremei lui Ceva, deoarece $\dfrac{PE}{EC}\cdot\dfrac{AB}{AP}\cdot\dfrac{CM}{MB} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{15}{3}\cdot\dfrac{4}{8} = 1$, rezultă BE, PM, CA concurente, de unde $\dfrac{CE}{EP}\cdot\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AP} \Rightarrow \dfrac{RF}{RS} = \dfrac{AB}{AP}$ $(*)$ **3p**

Totodată, din $FR \parallel AB$ și $RE \parallel AP$ avem $\dfrac{RF}{AB} = \dfrac{CR}{AC}$ și $\dfrac{RE}{AP} = \dfrac{CR}{AC} \Rightarrow \dfrac{RF}{AB} = \dfrac{RE}{AP} \Rightarrow \dfrac{RF}{RE} = \dfrac{AB}{AP}$, de unde, din $(*)$, obținem că $\dfrac{RF}{RE} = \dfrac{RF}{RS} \Rightarrow RE = RS$ **6p**

Problema 4 Demonstrați că numărul

$$(4 \cdot 1^4 + 1)(4 \cdot 2^4 + 1)(4 \cdot 3^4 + 1) \cdots (4 \cdot 20^4 + 1)$$

este pătrat perfect.

Soluție Notăm cu P numărul din enunț. Observăm că pentru orice număr natural k avem descompunerea

$$4k^4 + 1 = (2k^2 - 2k + 1)(2k^2 + 2k + 1).$$

.... **6p**

Dar

$$2k^2 + 2k + 1 = 2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1.$$

Notăm

$$a_k = 2k^2 - 2k + 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Atunci

$$4k^4 + 1 = a_k a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

.... **6p**

Prin urmare,

$$P = \prod_{k=1}^{20} a_k a_{k+1} = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{20} a_{21}),$$

deci

$$P = a_1 a_{21} \prod_{k=2}^{20} a_k^2.$$

.... **7,5p**

Cum

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1,$$

și

$$a_{21} = 2 \cdot 21^2 - 2 \cdot 21 + 1 = 882 - 42 + 1 = 841 = 29^2,$$

obținem

$$P = 29^2 \left(\prod_{k=2}^{20} a_k \right)^2.$$

Deci

$$P = \left(29 \prod_{k=2}^{20} a_k \right)^2,$$

adică P este pătrat perfect.

.... **3p**

Fiecare subiect se notează cu 0 – 22,5 puncte.
Se acordă ***10 puncte din oficiu.***

BAREM CLASA a VIII-a

Problema 1 Determinați cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a numărului $N=\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}$, unde a, b, c sunt 3 numere reale cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2=6$.

Soluție Din condițiile de definiție ale radicalilor, avem $a, b, c \in [-2,2]$ **3p**

Folosind inegalitatea $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$, obținem
$N^2=\left(\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\right)^2 \le 3\left[(\sqrt{4-a^2})^2+(\sqrt{4-b^2})^2+(\sqrt{4-c^2})^2\right]=3\left(12-a^2-b^2-c^2\right)=3(12-6)=18$, deci $N \le 3\sqrt{2}$ **6p**
În concluzie, maximul lui N este $3\sqrt{2}$ și se atinge pentru $a^2=b^2=c^2=2$ **3p**

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 \le b^2 \le c^2 \Rightarrow 0 \le a^2 \le 2$. Folosind inegalitatea $\sqrt{x}+\sqrt{y} \ge \sqrt{x+y}$, obținem $N=\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} \ge \sqrt{4-a^2}+\sqrt{8-b^2-c^2}=\sqrt{4-a^2}+\sqrt{2+a^2}$ **3p**
Atunci, notând $t=a^2$, avem

$$N^2 \ge (4-t+2+t)+2\sqrt{(4-t)(2+t)}=6+2\sqrt{8+t(2-t)} \ge 6+2\sqrt{8}=(2+\sqrt{2})^2,$$

deci $N \ge 2+\sqrt{2}$ **4,5p**
Așadar, minimul lui N este $2+\sqrt{2}$ și se poate atinge pentru $a^2=0, b^2=2, c^2=4$ ... **3p**

Problema 2 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC', respectiv DD'. Notăm $AM \cap BD=\{E\}, CN \cap BD=\{F\}, DP \cap CD'=\{E'\}, C'Q \cap CD'=\{F'\}$. Demonstrați că

a) $EE' \equiv FF'$ și $EE' \parallel (AC'Q)$;

b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele EE' și FF';

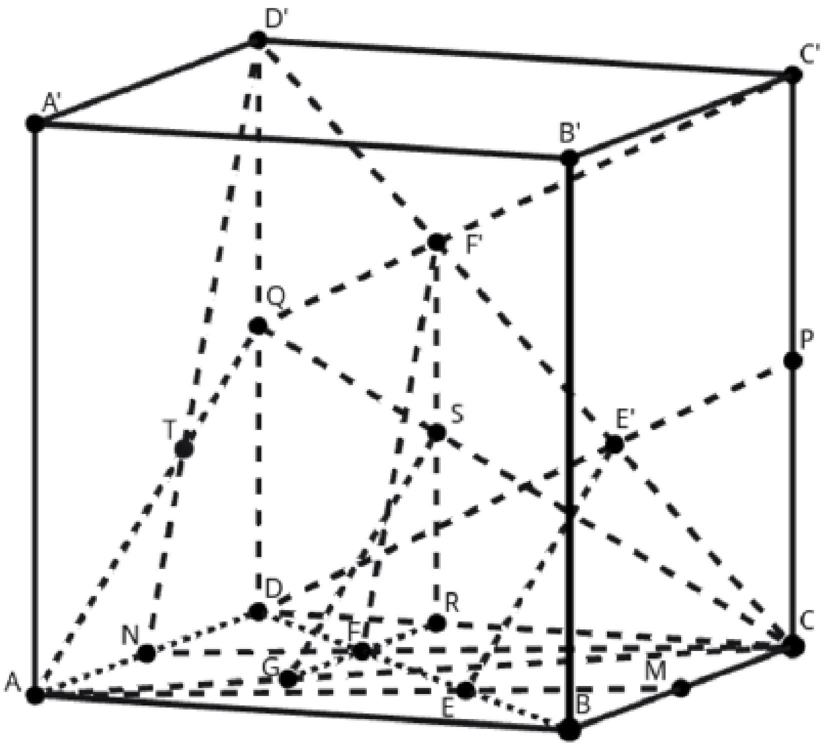
c) Demonstrați că $EE' \parallel (GFF')$, unde G este centrul de greutate al $\triangle ABD$.

Gazeta Matematică

Soluție Notăm $AB=2l$.

a) Știm că $\dfrac{DE'}{DP}=\dfrac{DD'}{DD'+PC}=\dfrac{2l}{3l}=\dfrac{2}{3}$. În mod analog, $\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{2}{3}$. Din reciproca teoremei lui Thales în $\triangle BDP$, rezultă $EE' \parallel PB$, de unde obține, folosind T.F.A., $EE'=\frac{2}{3}PB$.

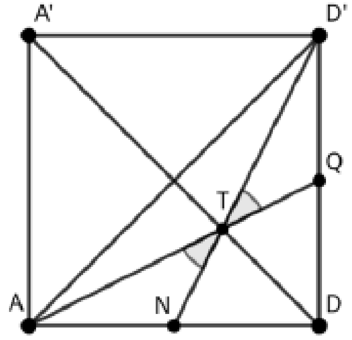
Cum $BP \overset{\parallel}{\equiv} AQ \Rightarrow EE' \parallel AQ$ și $EE'=\frac{2}{3}AQ \Rightarrow EE' \parallel (AC'Q)$. Analog, $FF' \parallel ND'$ și $FF'=\frac{2}{3}D'N$. Cum $ND'=AQ \Rightarrow EE' \equiv FF'$ **7,5p**



b) Din $EE' \parallel AQ, FF' \parallel ND' \Rightarrow \angle(EE', FF') = \angle(ND', AQ) = \angle ATN$, unde $\{T\} = AQ \cap D'N$.

Din $\triangle TQD' \equiv \triangle TNA$ (L.L.L.) $\Rightarrow TN = TQ \Rightarrow \triangle TDQ \equiv \triangle TDN$ (L.L.L) $\Rightarrow DT$ este bisectoarea lui $\angle D \Rightarrow D, T, A'$ puncte coliniare, deci T este centrul de greutate al lui $\triangle D'DA \Rightarrow D'T = TN \cdot 2 = \frac{2}{3}l\sqrt{5}$.

Totodată, $A_{\triangle TAN} = \frac{1}{6}A_{\triangle ADD'} = \frac{1}{12}A_{ABCD} = \frac{l^2}{3}$, dar $A_{\triangle TAN} = \dfrac{AT \cdot TN \cdot \sin\angle ATN}{2} = \dfrac{5l^2}{9}\sin\angle ATN$. Din cele două relații, obținem că $\sin\angle ATN = \dfrac{3}{5}$ **7,5p**



c) Fie $F'R \perp CD, R \in (CD)$ și $F'R \cap CQ = \{S\} \Rightarrow \dfrac{CS}{SQ} = \dfrac{CF'}{F'D'} = \dfrac{CC'}{QD'} = 2$. Cum G este centrul de greutate al $\triangle ABD \Rightarrow G \in AO$ și $AG = 2GO = 2x \Rightarrow CG = 4x$ și $\dfrac{CG}{GA} = \dfrac{4x}{2x} = 2 \Rightarrow \dfrac{CS}{SQ} = \dfrac{CG}{GA} = 2 \stackrel{\text{R.T.Th.}}{\Longrightarrow} GS \parallel AQ$ și cum $EE' \parallel AQ \Rightarrow EE' \parallel GS$.

Deoarece $\dfrac{CR}{RD} = \dfrac{CF}{FN} = \dfrac{CG}{GA} = 2 \Rightarrow R,\ F,\ G$ coliniare $\Rightarrow R \in (FGF') \Rightarrow S \in (FGF') \Rightarrow GS \subset (FGG') \Rightarrow EE' \parallel GS$ și $GS \subset (FGG') \Rightarrow EE' \parallel (GFF') \ldots$ **7,5p**

Problema 3 a) Arătați că nu există numere prime p_1, p_2, p_3 cu proprietatea că

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

este pătrat perfect.

b) Determinați toate tripletele de numere prime (p_1, p_2, p_3) cu $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ astfel încât

$$p_1^2 + 4p_2^2 + 9p_3^2$$

este pătrat perfect.

Soluție.

a) Presupunem că există numere prime p_1, p_2, p_3 și un număr natural nenul n astfel încât:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n^2.$$

Deoarece expresia $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ este simetrică în raport cu p_1, p_2, p_3, putem presupune, fără pierdere de generalitate, că $p_1 \leq p_2 \leq p_3$.

Orice număr întreg are forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ sau $4k+3$, deci pătratul său are forma $4k$ sau $4k+1$ (adică este fie multiplu de 4, fie cu restul 1 la împărțirea prin 4). Prin urmare, orice pătrat perfect este de forma $\mathcal{M}_4$ sau $\mathcal{M}_4 + 1$.

Dacă $p_1 \neq 2$, atunci p_1, p_2, p_3 sunt toate impare, deci pătratele lor sunt fiecare de forma $\mathcal{M}_4 + 1$. Suma lor are astfel forma $\mathcal{M}_4 + 3$, care nu poate fi pătrat perfect. Prin urmare, $p_1 = 2$.

.... **3p**

Dacă $p_2 \neq 2$, atunci p_2 și p_3 sunt impare, deci p_2^2 și p_3^2 sunt de forma $\mathcal{M}_4 + 1$. Suma $4 + p_2^2 + p_3^2$ are forma $\mathcal{M}_4 + 2$, care iarăși nu poate fi pătrat perfect. Prin urmare, $p_2 = 2$.

Ajungem la ecuația:

$$4 + 4 + p_3^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 - p_3^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad (n - p_3)(n + p_3) = 8.$$

Deoarece n și p_3 sunt numere naturale cu $n > p_3$, iar $n - p_3$ și $n + p_3$ au aceeași paritate și produsul lor este 8, singura factorizare posibilă cu ambii factori de aceeași paritate și ambii pozitivi este 2×4. Aceasta dă:

$$n - p_3 = 2, \quad n + p_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 1,$$

ceea ce este imposibil deoarece 1 nu este număr prim.

Prin urmare, nu există nicio tripletă de numere prime cu proprietatea cerută.

.... **6p**

b) Presupunem că există numere prime p_1, p_2, p_3 și un număr natural nenul n astfel încât:

$$p_1^2 + 4p_2^2 + 9p_3^2 = n^2.$$

Folosim din nou faptul că orice pătrat perfect este de forma $\mathcal{M}_4$ sau $\mathcal{M}_4 + 1$, iar $4p_2^2$ este întotdeauna de forma $\mathcal{M}_4$. Ținem cont și de condiția din enunț $p_1 \leq p_2 \leq p_3$.

Dacă $p_1 \neq 2$, atunci p_1 este impar, deci p_1^2 este de forma $\mathcal{M}_4 + 1$. În plus, din $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ rezultă că și p_3 este impar. De asemenea, $9 = 4 \cdot 2 + 1$, deci dacă p_3 este impar, $9p_3^2$ este tot de forma $\mathcal{M}_4 + 1$. Suma $p_1^2 + 4p_2^2 + 9p_3^2$ ar fi atunci de forma $\mathcal{M}_4 + 2$, care nu poate fi pătrat perfect. Prin urmare, $p_1 = 2$.

.... **3p**

Avem acum $p_1^2 = 4$, deci ecuația devine:

$$4 + 4p_2^2 + 9p_3^2 = n^2.$$

Analizăm resturile la împărțirea cu 3. Orice număr prim diferit de 3 nu este multiplu de 3, deci pătratul său lasă restul 1 la împărțirea prin 3. Termenul $9p_3^2$ este multiplu de 3. Termenul $4p_2^2$ lasă același rest la împărțirea prin 3 ca p_2^2. Iar $4 = 3 + 1$ lasă restul 1 la împărțirea prin 3.

Dacă $p_2 \neq 3$, atunci p_2^2 lasă restul 1 la împărțirea prin 3, deci $4 + 4p_2^2 + 9p_3^2$ lasă restul $1 + 1 = 2$ la împărțirea prin 3. Dar un pătrat perfect nu poate lăsa restul 2 la împărțirea prin 3 . Prin urmare, $p_2 = 3$.

.... **3p**

Ecuația devine:

$$4 + 36 + 9p_3^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad 9p_3^2 + 40 = n^2,$$

adică:

$$n^2 - 9p_3^2 = 40 \quad \Rightarrow \quad (n - 3p_3)(n + 3p_3) = 40.$$

Deoarece $n - 3p_3$ și $n + 3p_3$ au aceeași paritate (suma lor este $2n$, număr par), ambii trebuie să fie de aceeași paritate. Factorizările lui 40 cu ambii factori pozitivi și de aceeași paritate sunt:

$$(2,\ 20) \quad \text{și} \quad (4,\ 10).$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **4,5p**

Cazul $(n - 3p_3,\ n + 3p_3) = (2,\ 20)$:

$$2n = 22 \Rightarrow n = 11, \qquad 6p_3 = 18 \Rightarrow p_3 = 3,$$

iar $p_3 = 3$ este număr prim.

Cazul $(n - 3p_3,\ n + 3p_3) = (4,\ 10)$:

$$2n = 14 \Rightarrow n = 7, \qquad 6p_3 = 6 \Rightarrow p_3 = 1,$$

iar $p_3 = 1$ nu este număr prim.

Prin urmare, singurul triplet de numere prime care satisface condiția din enunț este:

$$(p_1,\ p_2,\ p_3) = (2,\ 3,\ 3), \quad \text{cu } n = 11.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **3p**

Problema 4 Considerăm o prismă cu baza poligon regulat cu n laturi, $n \geq 3$. Numerele $1, 2, 3, \dots, 2n$ se scriu, la întâmplare, în vârfurile prismei. Notăm cu $m_1, m_2, \dots, m_{n+2}$ media aritmetică a numerelor aflate în vârfurile fiecărei fețe a prismei și cu M media aritmetică a numerelor $m_1, m_2, \dots, m_{n+2}$. Calculați partea fracționară a lui M.

Soluție

Considerăm $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n$ mediile aritmetice ale numerelor aflate pe fețele laterale. Fie $S_1 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \dfrac{2(1 + 2 + \cdots + 2n)}{4}$ (fiecare vârf apare în două fețe). Obținem

$$S_1 = \frac{n(2n+1)}{2}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **6p**

Fie m_{n+1}, m_{n+2} mediile aritmetice ale bazelor și

$$S_2 = m_{n+1} + m_{n+2} = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 2n}{n} = \frac{2n(2n+1)}{2n} = 2n + 1$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **6p**

Atunci

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{n+2}}{n+2} = \frac{S_1 + S_2}{n+2} = \frac{\dfrac{n(2n+1)}{2} + 2n + 1}{n+2} = \frac{(2n+1)(n+2)}{2(n+2)} =$$

$$= \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **6p**

Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă $\{M\} = 0,5$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **4,5p**

*Se acordă **10 puncte din oficiu**.*